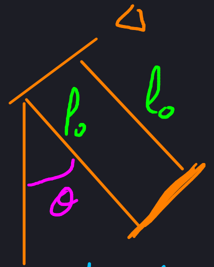
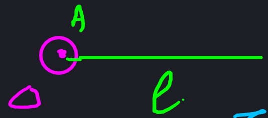
Pb 1 : Balançoire

I-1



Si les deux cordes sont initialement tendues, le mouvement sera nécessairement plan

I-2



On a ici $x = \frac{\ell}{2}$, soit :

$$J_x = \frac{m\ell^2}{12} + m\frac{\ell^2}{4} = \boxed{\frac{m\ell^2}{3} = J_x}$$

I-3-a On a

- 1 barre ℓ_h, m_h à $\ell_0 - \frac{\ell_h}{2}$
- ℓ_j, m_j à $\ell_0 - \frac{\ell_j}{2}$, soit
- ℓ_c, m_c à $\ell_0 - \frac{\ell_c}{2}$

$$\boxed{J_0 = m_h\left(\frac{\ell_h^2}{12} + \left(\ell_0 - \frac{\ell_h}{2}\right)^2\right) + m_j\left(\frac{\ell_j^2}{12} + \left(\ell_0 - \frac{\ell_j}{2}\right)^2\right) + m_c\left(\frac{\ell_c^2}{12} + \left(\ell_0 - \frac{\ell_c}{2}\right)^2\right) = 84\ \mathrm{kg\,m^2}}$$

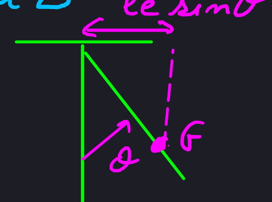
et $\boxed{\sigma_\Delta = J_0\dot{\theta}}$

I-3-b On a les c.d.m. de chacune des tiges au milieu des tiges

- m_h à $\left(\ell_0 - \frac{\ell_h}{2}\right)$
- m_j à $\left(\ell_0 - \frac{\ell_j}{2}\right)$
- m_c à $\left(\ell_0 - \frac{\ell_c}{2}\right)$

$$\boxed{OG = \frac{m_h\left(\ell_0 - \frac{\ell_h}{2}\right) + m_j\left(\ell_0 - \frac{\ell_j}{2}\right) + m_c\left(\ell_0 - \frac{\ell_c}{2}\right)}{m_h + m_j + m_c} \qquad \ell_e = 1{,}8\ \mathrm{m}}$$

I-3-c L'ensemble enfant + corde + siège est 1 solide en rotation autour de Δ



- de cdm G
- de moment d'inertie J_0
- soumis à $\begin{cases} \vec{P} = (m_h + m_j + m_c)\vec{g} \text{ de bras de levier } \ell_e \sin\theta \\ \text{+ actions sur l'axe de moment nul} \end{cases}$

Le th. du moment cinétique s'écrit

$$\boxed{J_0\ddot{\theta} = -m_{tot}\, g\, \ell_e \sin\theta, \text{ avec } m_{tot} = m_h + m_c + m_j = 26\ \mathrm{kg}}$$

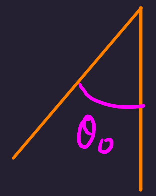
soit $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$ avec (pour $\theta \ll 1$)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{tot}\, g\, \ell_e}{J_0}} = 2{,}3\ \mathrm{rad/s}$ $\quad\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2{,}7\ \mathrm{s}}$

I-3-d) Conservation de Em entre :

$$E_m = \frac{1}{2} J_0 \dot\theta^2 \leftarrow E_c$$

$$+ m_{tot} g l_e (1-\cos\theta) \leftarrow E_p$$



$v=0$, $\theta=\theta_0$; $v = v_{max}$, $\theta = 0$. On obtient

$$\frac{1}{2} J_0 \frac{v_{max}^2}{l_0^2} = m_{tot} g l_e (1-\cos\theta_0)$$

avec $v = l_0 \dot\theta$

soit

$$\boxed{v_{max} = l_0 \sqrt{\frac{2 m_{tot} g l_e (1-\cos\theta_0)}{J_0}} = 4{,}7\ m\cdot s^{-1}}$$

2, 26, 1,8 m, 300, 84

I-4-a) De nouveau, conservation de Em :

$$\dot\theta = \pm\sqrt{\frac{2 m_{tot} g l_e (\cos\theta - \cos\theta_0)}{J_0}}$$

I-4-b) Sur 1/4 période, de $\theta = 0$ à $\theta = +\theta_0$,

$\dot\theta > 0$ et $\dot\theta = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2 m_{tot} g l_e (\cos\theta - \cos\theta_0)}{J_0}}$

$$\int_{t=0}^{T(\theta_0)/4} dt = \int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{d\theta\,\sqrt{J_0}}{\sqrt{2 m_{tot} g l_e (\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

$$\boxed{T(\theta_0) = 2\sqrt{\frac{2 J_0}{m_{tot} g l_e}} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}}$$

$\theta \ll 1$ $T(\theta_0) \to T_0$

$\theta \to \pi$ $T(\theta_0) \to +\infty$

I-4-c) On pose $\sin u = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$

$$\to \cos u\, du = \frac{\cos(\theta/2)\, d\theta/2}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\theta/2$$
$$\ominus\ \cos\theta_0 = 1 - 2\sin^2\theta_0/2$$

$$= 2\left(\sin^2\theta_0/2 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\left(1 - \sin^2 u\right)$$

notons que $0 < \theta \leq \theta_0 < \pi/2$ donc $\sin\theta > 0$, $\cos\theta > 0$ et $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

donc

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\frac{\theta_0}{2}}} = \frac{2\cancel{\cos u}\,du\,\cancel{\sin\theta_0/2}}{\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2}\,\cancel{\sin\frac{\theta_0}{2}}\,\cancel{\sqrt{1-\sin^2 u}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,du}{\cos\theta/2} = \frac{\sqrt{2}\,du}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2 u}}$$

Finalement

$$T(\theta_0) = 4\underbrace{\sqrt{\frac{J_0}{m_{tot}\,g\,\ell_e}}}_{=\frac{1}{\omega_0}=\frac{T_0}{2\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2 u}}$$

$$T(\theta_0) = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2 u}}$$

Pour $\sin\frac{\theta_0}{2} \ll 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2 u}} \simeq 1 + \frac{\sin^2\theta_0/2}{2}\sin^2 u$$

$$\simeq 1+\frac{\theta_0^2}{8}\sin^2 u$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\theta_0^2}{8}\sin^2 u\right)du \simeq \frac{\pi}{2}+\frac{\theta_0^2}{8}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin^2 u\,du}_{=\frac{\pi}{4}}$$

soit $\boxed{\frac{T(\theta_0)}{T_0} = 1+\frac{\theta_0^2}{16}}$

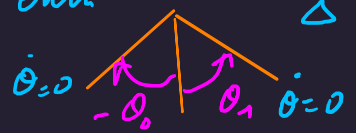
Pour $60° = 1{,}0$ rad

$\frac{\theta_0^2}{16} = 7\cdot 10^{-2}$ et on

lit bien $\frac{T}{T_0} = 1 + 0{,}07$ en $60°$

I-5-a] Le th. de l'énergie mécanique :

entre



$$\Delta E_m = \boxed{m_{tot}\,g\,\ell_e(\cos\theta_0-\cos\theta_1) = W_f(\Gamma) = -\Gamma(\theta_0+\theta_1)}$$

I-5-b] On a $\frac{\cos\theta_1-\cos\theta_0}{\theta_0+\theta_1} = \frac{\Gamma}{m_{tot}\,g\,\ell_e}$

Pour $\theta_0-\theta_1 \ll 1$

$$\begin{cases} \cdot\ \theta_0+\theta_1 \simeq \theta_0 \\ \cdot\ \cos\theta_1-\cos\theta_0 \simeq \sin\theta_0(\theta_0-\theta_1)\end{cases}$$

soit $\boxed{\theta_0-\theta_1 \simeq \frac{2\theta_0\Gamma}{m_{tot}\,g\,\ell_e\sin(\theta_0)}}$

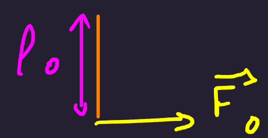
Pour $\theta < 30°$, on peut approximer $\sin\theta \simeq \theta$

soit $\theta_0-\theta_1 \simeq \frac{2\Gamma}{m_{tot}\,g\,\ell_e}$. On a donc

$$\frac{2N_f\Gamma}{m_{tot}\,g\,\ell_e} = \frac{\theta_0}{2}$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{\theta_0\, m_{tot}\,g\,\ell_e}{4N_f} \simeq 12\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}}$$

I-5-c] Le moment de la force est $\mathcal{M} = F_0\ell_0$, son travail sera $W_m = 2F_0\ell_0\theta_p$.



Elle compensera le travail de la force de frottement $W_f = -2F\theta_{max}$ avec $\theta_{max} = 80°$, soit

$$\boxed{F_o = \frac{\Gamma\, \theta_{max}}{l_o\, \theta_p} = 95\,N}$$

12 , 80 , 2 , 5

II-1 a) On a

$I_a = I_o$ et

$$\boxed{\begin{aligned} I_d &= m_h\left(\frac{l_h^2}{12} + \left[l_o - \left(l_c + l_j + \frac{l_h}{2}\right)\right]^2\right) \\ &+ m_c\left(\frac{l_c^2}{12} + \left[l_o - \left(l_j + \frac{l_c}{2}\right)\right]^2\right) \\ &+ m_j\left(\frac{l_j^2}{12} + \left[l_o - \frac{l_j}{2}\right]^2\right) \\ &= 51\ kg\,m^2 \end{aligned}}$$ $< I_o = I_a$

II-1-b) On a $l_a = l_e$ et on calcule

$$m_{tot}\, l_d = m_h\left(l_o - \left(l_j + l_c + \frac{l_h}{2}\right)\right) + m_c\left(l_o - \left(l_j + \frac{l_c}{2}\right)\right) + m_j\left(l_o - \frac{l_j}{2}\right) \rightarrow \boxed{l_d = 1{,}4\,m} < l_e$$

II-2-a) Entre $-\theta_m$ et θ_{m+1}, le moment d'inertie $I(\theta)$ et la distance du barycentre à l'axe $l(\theta)$ varient :

$\theta \in [-\theta_m, 0]$: $I = I_a$ $\quad l = l_a = l_o$

$\theta \in [0, \theta_{m+1}]$: $I = I_d$ $\quad l = l_d$

$l\,C$

On calcule $\dfrac{d(I(\theta)\dot\theta)^2}{dt} = 2I(\theta)\dot\theta \times \dfrac{d}{dt}(I(\theta)\dot\theta)$

qu'on intègre entre $-\theta_m$ et θ_{m+1}, par rapport au temps

- $\displaystyle\int_{-\theta_m}^{\theta_{m+1}} \frac{d(I(\theta)\dot\theta)^2}{dt}\,dt = 0$ car $\dot\theta = 0$ aux extrémités
- $I(\theta)\dot\theta$ = moment cinétique $\rightarrow \dfrac{d(I(\theta)\dot\theta)}{dt} = \Gamma_{ext}$ TMC $= -m_{tot}\,g\,l(\theta)\sin(\theta)$

soit :

$$0 = \int_{-\theta_m}^{\theta_{m+1}} 2I(\theta)\dot\theta \times (-m_{tot}\,g\,l(\theta)\sin(\theta))\,dt \qquad \dot\theta\,dt = d\theta$$

$$\boxed{0 = \int_{-\theta_m}^{\theta_{m+1}} I(\theta)\,l(\theta)\sin(\theta)\,d\theta}$$ (on enlevant $-2m_{tot}g$)

II-2-b) $I(\theta)$ et $l(\theta)$ sont constants par morceaux

- $\displaystyle\int_{-\theta_m}^{0} I_a\, l_a \sin(\theta)\,d\theta = I_a\, l_a(\cos(\theta_m) - 1)$
- $\displaystyle\int_{0}^{\theta_{m+1}} I_d\, l_d \sin(\theta)\,d\theta = I_d\, l_d(1 - \cos\theta_{m+1})$

Avec $1-\cos\theta = 2\sin^2\theta/2$, il vient

$$I_a l_a (\cos(\theta_n)-1) + I_d l_d (1-\cos\theta_{n+1}) = 0$$

$$\to \quad I_a l_a \sin^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = I_d l_d \sin^2\left(\frac{\theta_{n+1}}{2}\right)$$

$$\sin^2\left(\frac{\theta_{n+1}}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \times \frac{I_a l_a}{I_d l_d} = \beta^2$$

avec $\beta > 1$ car $I_a > I_d$, $l_a > l_d$

suite géométrique

$$\to \quad \boxed{\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\beta^n}$$

Rem. valable tant que $\frac{\theta_n}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ie $\theta_n \in [0, \pi]$ car au delà $\dot\theta$ ne s'annule plus... Pour avoir $\theta_n > \frac{\pi}{2}$, il faut de plus des tiges rigides.

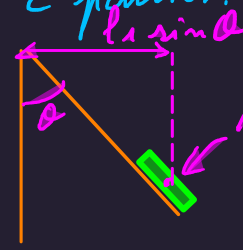
II-2-c) On calcule $\boxed{\beta = \sqrt{\frac{I_a l_a}{I_d l_d}} = 2,3}$

puis $\sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\beta^4 \to \boxed{\theta_4 = 63°}$

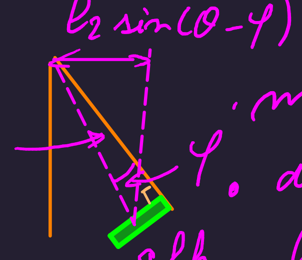
Pour $n=5$: $\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\beta^5 > 1$: on a déjà dépassé la verticale

III-1) En position couché, le haut du corps est plus loin de l'axe donc $\boxed{I' > I_0}$

III 2a) On sépare les moments des poids des 2 parties:



masse $m_j + m_c$
distance à l'axe $l_0 - \frac{l_j}{2} = l_1$
bras de levier $l_1 \sin\theta = 1,85$ m



. masse m_h
. distance à l'axe $\sqrt{l_0^2 + \left(\frac{l_h}{2}\right)^2} = l_2 \approx l_0$
. bras de levier $l_2 \sin(\theta - \varphi)$
avec $\tan\varphi = \frac{l_h/2}{l_0}$ $\varphi = 7°$

La loi du moment cinétique s'écrit:

$$I'\ddot\theta = -(m_j + m_c) g l_1 \sin\theta - m_h g l_2 \sin(\theta - \varphi)$$

$$\boxed{\ddot\theta = -\omega_1^2 \sin\theta - \omega_2^2 \sin(\theta-\varphi) \qquad \omega_1^2 = \frac{(m_j+m_c) g l_1}{I'} \qquad \omega_2^2 = \frac{m_h g l_2}{I'}}$$

III-2 b)

On a, à $t=0$, où $\theta = 0$

$$\ddot{\theta} = +\omega_2^2 \sin(\varphi) > 0 \rightarrow$$ accélérat° vers les $\theta > 0$

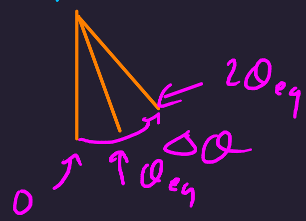
La position d'équilibre n'est plus $\theta = 0$ mais θ_{eq} tel que $0 = -\omega_1^2 \sin(\theta_{eq}) - \omega_2^2 \sin(\theta_{eq} - \varphi)$

soit, pour les petits angles :

$$\omega_1^2 \theta_{eq} = -\omega_2^2 (\theta_{eq} - \varphi)$$

$$\boxed{\theta_{eq} = \frac{\omega_2^2 \varphi}{\omega_1^2 + \omega_2^2}}.$$

Les oscillat° sont aussi quasi harmoniques, on oscille entre $\theta = 0$ et $\theta = 2\theta_{eq}$



On a donc $\Delta\theta = 2\theta_{eq}$

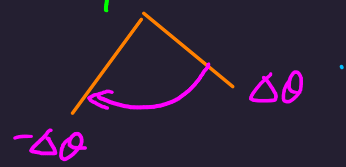
$$= \frac{2\omega_2^2 \varphi}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

On a $\varphi \approx \tan \varphi = \frac{\ell_h}{2\ell_0}$ soit $$\boxed{\Delta\theta = \frac{\ell_h m_k \ell_2 / \ell_0}{\ell_2 m_h + \ell_1 (m_j + m_c)}}$$

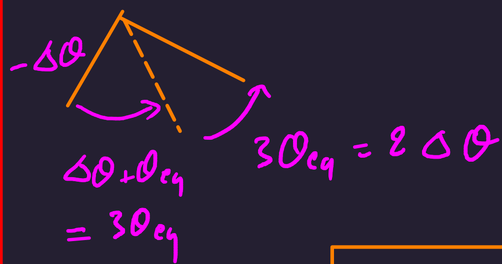
$$\boxed{\Delta\theta = 0{,}15 \text{ rad} = 8{,}6°}$$

III-2-c)

Après avoir atteint $\Delta\theta$, l'enfant se redresse : l'équat° devient $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta$: oscillation autour de $\theta = 0$. Sous l'hypothèse qu'on reste harmonique : on oscille donc de $\Delta\theta$ à $-2\Delta\theta$



Ensuite oscillation autour de θ_{eq}, jusqu'à



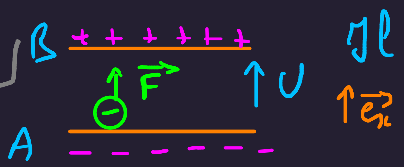
Croissance de l'amplitude de $\Delta\theta = 2\theta_{eq}$ à chaque oscillation.

Il faudra $$\boxed{N = \left\lfloor \frac{30°}{\Delta\theta} \right\rfloor = 3}$$

Rem : il est encore raisonnable d'utiliser $\sin(x) \approx x$ pour $x = 30°$

Pb II : Optique électronique

I 1a)



Il faut $\boxed{U > 0}$

I-1b) Conservation de l'Em entre :

- A $\quad \mathcal{E}_c = 0 \quad \mathcal{E}_p = -eV_A$
- $\quad \mathcal{E}_c(B) \quad \mathcal{E}_p = -eV_B$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{E}_c(B) &= e(V_B - V_A) \\ &= eU\end{aligned}}$$

Il faut $\boxed{U_0 = 200\ kV}$ car la charge est $q = -e$

I 2a) Loi de la qdm $\quad m\vec a = -e\vec E = \frac{eU}{d}\vec e_x$

mouvement uniformément accéléré

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{eU}{dm}\right)^2 t^2 \quad (\text{car } \dot x(0) = 0)$$

$$\boxed{\Delta t_{AB} = \sqrt{\frac{2\overset{1\,cm}{d^2}\, m_e}{\underset{200\,keV}{eU_0}}} = 7{,}5.10^{-11}\,s}$$

I-2b) $\Delta t_{AB} \propto d$: on aura $\boxed{\Delta t_{AB} = 3{,}8\ 10^{-11}\,s}$ pour $d = 5$ mm.

I 3) La conservation d'Em donne ici

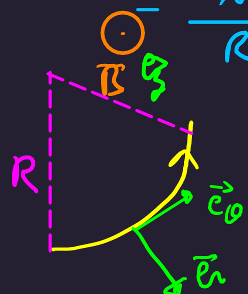
$$(\gamma - 1)mc^2 = eU_0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{eU_0}{m_e c^2}$$

ie $\boxed{v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{eU_0}{mc^2}\right)^2}} = 2{,}1\ 10^8\ m.s^{-1}}$

II-1-a) Comme vu en cours

- La force magnétique $q\vec v \wedge \vec B$ ne travaille pas : le mouvement est donc uniforme.
- le mouvement circulaire uniforme d'accélération

$$-\frac{v^2}{R}\vec e_r = \frac{-e}{m} v\vec e_\theta \wedge B_0 \vec e_z \quad \text{et bien}$$



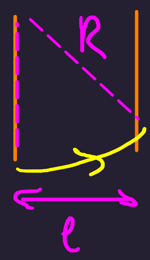
solution pour $\boxed{R = \frac{mv}{eB_0}}$

II-1-b) En mécanique relativiste, on a $\vec p = \gamma m\vec v$. Ici $\gamma = cte$ (car $\mathcal{E}_c = cte$ puisque $q\vec v \wedge \vec B$ ne travaille pas) et donc

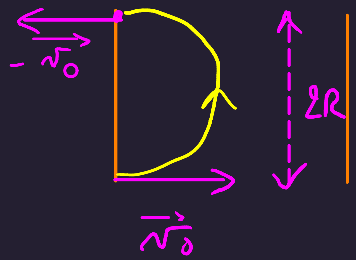
$$\frac{d\vec p}{dt} = \frac{d(\gamma m\vec v)}{dt} = \gamma m\frac{d\vec v}{dt}.$$

La loi de la qdm reste la même en remplaçant m par γm, soit $\boxed{R = \dfrac{\gamma m v}{e B_0}}$

II-2-a) L'électron traverse si $\boxed{R > \ell}$

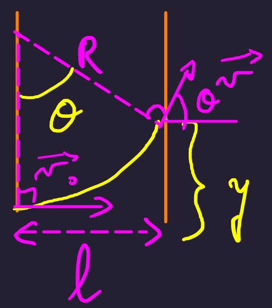


II-2-b) Pour $R < \ell$, il fait $\frac{1}{2}$ tour et ressort à la distance de



$$\boxed{2R = \frac{2mv}{eB_0} = \frac{2}{B_0}\sqrt{\frac{2mU_0}{e}} = 3.10^{-2}\ \text{cm}}$$

II-2-c)



On a $\boxed{\|\vec{v}\| = \|\vec{v_0}\|}$

$\ell = R\sin\theta$ $\quad \sin\theta = B_0 \ell \sqrt{\dfrac{e}{2mU_0}}$ pour $\ell = 1$ cm

$y = R(1 - \cos\theta)$

$= R\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{\ell^2}{R^2}}\right) \rightarrow \boxed{\theta = 41^\circ}$

$= \boxed{3{,}8\ \text{mm} = y}$

II-3-a) On utilise le résultat de la question II-2-b en les adaptant

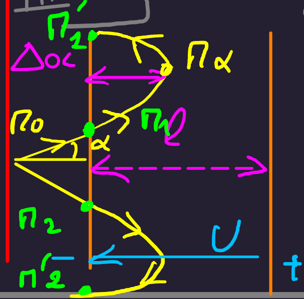
On a $M_1M_2 = 2x_0\tan\alpha$

par symétrie, on a le même Δy dans le même sens pour les deux points d'entrée M_1 et M_2

soit $M'_1M'_2 = M_1M_2 = 2x_0\tan\alpha$. Comme on retrouve l'angle α en sortie, M'_α est à la même distance x_0 du plan d'entrée, distant de $\boxed{\Delta y = 2R\cos\alpha}$ selon $\vec{e_y}$

II-3-b) Pour $\alpha \ll 1$, on a $\delta y \simeq 2R$ et $M'_\alpha \simeq$ symétrique de M_0 comme pour un miroir plan

III-1)

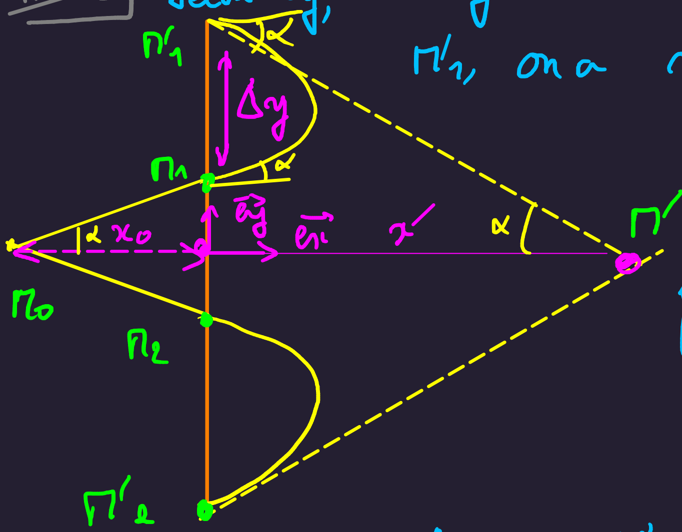


La conservation de l'énergie entre M_0 et M_α donne

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - eV(M_0) = \frac{1}{2}mv^2(M_\alpha) - eV(M_\alpha)$$

soit $v^2(M_\alpha) = v_0^2 - \frac{2e}{m}(V(M_0) - V(M_\alpha))$. On peut traverser si $v^2(M_\alpha) > 0$ pour M_α en $x = \ell$. Il faut donc $\boxed{0 < v_0^2 < \frac{2eU}{m}}$ pour qu'ils soient réfléchis $\forall \alpha$, en particulier $\alpha = 0$

III-2 Selon $\vec{e_y}$, on a $y(M_1) = x_0 \tan\alpha$. Entre M_1 et M'_1, on a $m\vec{a} = \frac{-eU}{\ell m}\vec{e_x}$,



$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{-eUt}{m\ell} + v_0\cos\alpha \\ y - y(M_1) = v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

on est en M'_1 pour $\dot{x} = -v_0\cos\alpha$ soit $t = \frac{2m\ell v_0\cos\alpha}{eU}$

$$\Delta y = y(M'_1) - y(M_1) = \frac{2m\ell v_0^2}{eU}\sin\alpha\cos\alpha$$

Finalement $y(M') = y(M_1) + \Delta y = x_0\tan\alpha + \Delta y$

$\tan\alpha = \frac{y(M')}{x(M')}$ soit $x(M') = x_0 + \frac{\Delta y}{\tan\alpha} =$

$$\boxed{x(M') = x_0 + \frac{2m\ell v_0^2\cos^2\alpha}{eU}}$$

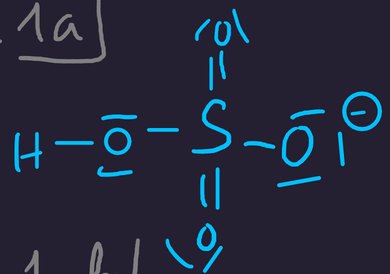
III-3 Pour $\alpha \ll 1$, on a

$$\boxed{x(M') = x_0 + \frac{2m\ell v_0^2}{eU}}$$

différent du cas d'un miroir pour lequel $x(M') = x_0$

PB 3 Lixiviation

I 1 a)



$m.o.(S) + 4\times(-II) + I = -I$

soit $\boxed{m.o.(S) = VI}$

I-1-b)

$$\underset{VI}{HSO_4^-} + 8e^- + Cu^{2+} + 7H^+ \longrightarrow Cu\overset{-II}{S} + 4H_2O \qquad K_{1/2} = 10^{\frac{8E^0}{0,06}} \quad (1)$$

$$\underset{VI}{HSO_4^-} + 8e^- + 7H^+ \longrightarrow \underset{-II}{S^{2-}} + 4H_2O \qquad 10^{\frac{8E_4^0}{0,06}}$$

$$Cu^{2+} + S^{2-} \longrightarrow CuS \qquad \frac{1}{K_{s1}}$$

soit $10^{8E_0} = 10^{8E_4^0} \times \frac{1}{K_{s1}} = 10^{8E_4^0}\, 10^{pK_{s1}}$

$$\boxed{E^0(HSO_4^-/CuS) = E_4^0 + \frac{pK_{s1}}{8}\times 0,06 = 0,40\ V}$$

I-2 La formule de Nernst donne

$$E = E^0(HSO_4^-/CuS) + \frac{0,06}{8}\log\frac{\overset{10^{-2}}{[HSO_4^-]}\overset{10^{-4}}{[Cu^{2+}]}\overset{\to 1}{h^7}}{c^{0\,2}}$$

$$\boxed{= 0,355\ V}$$

$$Fe^{3+} + e^- \longrightarrow Fe^{2+} \quad (2) \qquad K_{1/2} = 10^{\frac{E^0(Fe^{3+}/Fe^{2+})}{0,06}}$$

$$E = E^0(Fe^{3+}/Fe^{2+}) + 0,06\log\frac{\overset{10^{-2}}{[Fe^{3+}]}}{\underset{10^{-2}}{[Fe^{2+}]}}$$

$$\boxed{= 0,77\ V}$$

I-3) On a

$$8Fe^{3+} + CuS + 4H_2O \rightleftharpoons 8Fe^{2+} + Cu^{2+} + 7H^+ + HSO_4^-$$

$$(3) = 8\,(2) - (1)$$

soit $K_3 = 10^{8\frac{E^0(Fe^{3+}/Fe^{2+}) - E^0(HSO_4^-/CuS)}{0,06}}$

$$\boxed{K_3 = 10^{50}}$$

Dans les conditions du II-2 :

$$Q = \frac{[Fe^{2+}]^8[Cu^{2+}]h^7[HSO_4^-]}{[Fe^{3+}]^8} = 10^{-6} \ll 10^{50}$$

on observe bien la réaction.

II-1-a

(4) $FeS_{(s)} \rightleftharpoons Fe^{2+} + S^{2-}$ K_{s2}

(2) $Fe^{3+} + e^- \rightleftharpoons Fe^{2+}$ $K_{1/2} = 10^{\frac{E^0(Fe^{3+}/Fe^{2+})}{0{,}06}}$

(-1) $S^{2-} + 4H_2O \rightleftharpoons HSO_4^- + 8e^- + 7H^+$ $10^{\frac{-8E^0(HSO_4^-/S^{2-})}{0{,}06}}$

$-(1) + 8(2) + (4)$

$4H_2O + 8Fe^{3+} + FeS_{(s)} \rightleftharpoons 9Fe^{2+} + HSO_4^- + 7H^+$ (5)

$$\boxed{K_5 = K_{s2}\, 10^{\frac{8(E^0(Fe^{3+}/Fe^{2+}) - E^0(HSO_4^-/S^{2-}))}{0{,}06}} = 10^{68}}$$

II-1-b On étudie (5) - (3)

$FeS + Cu^{2+} \rightleftharpoons Fe^{2+} + CuS$ (6) $\frac{K_5}{K_3} = 10^{18} = K_6$ $\left(= \frac{K_{s2}}{K_{s1}}\right)$

En présence de Cu^{2+}, FeS est instable : il est donc plus facile de dissoudre FeS que CuS par action de Fe^{3+}

II-2 On observe d'abord la dissolution de FeS

$4H_2O + 8Fe^{3+} + FeS_{(s)} \rightleftharpoons 9Fe^{2+} + HSO_4^- + 7H^+$ (5) $K_5 \gg 1$

$c_{Fe} v_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ mol

$n_0 = \frac{m_0}{M} = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$ mol

Fe^{3+} est en défaut, on le consomme entièrement et il reste

$$\boxed{\begin{aligned} n(FeS) &= n_0 - \frac{5}{8} \cdot 10^{-2} \\ &= 3{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \\ m(Fe) &= 0{,}33\ g \end{aligned}}$$

On a formé Fe^{2+} à la concentration

$$\boxed{[Fe^{2+}] = \frac{9}{8} c_{Fe} = 5{,}6 \cdot 10^{-1}\ \text{mol} \cdot L^{-1}}$$

Cu^{2+} est négligeable, avec

$$\boxed{[Cu^{2+}] = \frac{[Fe^{2+}]}{K_6} = 5{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{mol} \cdot L^{-1}}$$

II-3-a On a

H_2SO_4	$+ H_2O \rightleftharpoons$	HSO_4^-	$+ H_3O^+$
c_a		0	0
0		c_a	c_a

totale

HSO_4^-	$+ H_2O \rightleftharpoons$	SO_4^{2-}	$+ H_3O^+$
c_a		0	c_a
$c_a(1-\gamma)$		$c_a\gamma$	$c_a(1+\gamma)$

(7) K_a

On a $K_a = \frac{c_a(1+\gamma)\gamma}{c^\circ(1-\gamma)}$ et $pH = 0 \Rightarrow c_a(1+\gamma) = 1\,mol.L^{-1}$

On suppose $\gamma \ll 1$ ie $\boxed{c_a \simeq 1\,mol.L^{-1}}$

$K_a \simeq \frac{2c_a}{c^\circ}\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{K_a}{2c_a}c^\circ = 6.10^{-3}$, bien $\ll 1$

On a donc $\boxed{\begin{array}{l}[HSO_4^-] \simeq 1\,mol.L^{-1} \\ [SO_4^{2-}] \simeq 6.10^{-3}\,mol.L^{-1}\end{array}}$

II-3-b

La dissolution de H_2SO_4, si elle avait conduit à $pH=0$, aurait produit 10^{-1} mol de HSO_4^-, soit 100 fois trop.

III 1 On aurait (3) + (5) : (7)

$$8H_2O + 16\,Fe^{3+} + CuFeS_2 \rightleftharpoons 17\,Fe^{2+} + 2\,HSO_4^- + 14\,H^+ + Cu^{2+}$$

III-2

$\uparrow 2\,m_0 = 2{,}2.10^{-2}$ mol.

Il faudrait $32\,m_0 = C_{Fe}V_{min} \rightarrow \boxed{V_{min} = 1{,}4\,L}$

III-3 Si on peut considérer $CuFeS_2$ comme 1 mélange équimolaire, on aurait

$V < \frac{V_{min}}{2}$. Une fract° des Fe^{2+} de $CuFeS_2$ sont dissous mais aucun des Cu^{2+} ne l'est.

$\frac{V_{min}}{2} < V < V_{min}$. Tout le Fe^{2+} est dissous, ainsi qu'une fraction des Cu^{2+}

Il est cependant peu probable que ce modèle soit pertinent et on observera plutôt une dissolution de Cu^{2+} et Fe^{2+} à dans des proportions comparables.

IV 1

(8) $\frac{1}{2}\overset{0}{O_2}{}_{(g)} + 2H^+ + 2e^- \longrightarrow H_2\overset{-II}{O}$ $\quad K_{1/2} = 10^{\frac{2}{0{,}06}E^\circ(O_2/H_2O)}$

$$E = \underset{1{,}23}{E^\circ(O_2/H_2O)} + \frac{0{,}06}{2}\log\sqrt{\underset{2{,}1.10^{-1}}{P_{O_2}}}\;\underset{1}{h^2}$$

$$\boxed{E = 1{,}22\,V}$$

IV-2-a

$\frac{1}{2}O_2 + 2H^+ + 2Fe^{2+} \rightleftharpoons H_2O + 2Fe^{3+}$ (9) = (8) - (2)

$$\boxed{K_9 = 10^{\frac{2(1{,}23-0{,}77)}{0{,}06}} = 10^{15{,}3}}$$

IV-2-b) On a $Q = \dfrac{[Fe^{3+}]^2}{[Fe^{2+}]^2 \, h^2 \sqrt{P_{O_2}}} = 2{,}2 \ll K_g$

$1 = \dfrac{[Fe^{3+}]^2}{[Fe^{2+}]^2}$, h^2: 1, $\sqrt{P_{O_2}}$: $2{,}1.10^{-1}$

On observe bien cette réaction : O_2 permet de régénérer des Fe^{3+} à partir d'une solution de Fe^{2+}

Rem : On aurait aussi bien pu vérifier que le potentiel de Nernst de (O_2/H_2O) est supérieur à celui de Fe^{3+}/Fe^{2+}

IV-3-a) On veut que O_2 oxyde Tred pour former Tox et que Tox oxyde Fe^{2+} ; il faut donc

$$\boxed{E^0(O_2/H_2O) > E^0(Tox/Tred) > E^0(Fe^{3+}/Fe^{2+})}$$

IV-3-b) Si c'est Tox qui est régénéré, l'ordre des réactions doit être :

$$Tox + Fe^{2+} \rightarrow Fe^{3+} + Tred$$ suivi de

régénéré

$$O_2 + Tred \rightarrow H_2O + Tox$$